Муниципальный этап всероссийской олимпиады школьников по экономике.
Республика Татарстан. 2024-2025 учебный год.

11 класс
Тестовая часть

---

5 вопросов, в каждом из которых среди четырех вариантов нужно выбрать единственно верный или наиболее полный ответ. Правильный ответ приносит **2 балла**.

---

1. Какой цели в настоящее время придерживается Центральный Банк России?

(a) Таргетирование инфляции;

(b) Таргетирование валютного курса;

(c) Таргетирование процентных ставок;

(d) Таргетирование ВВП.

Ответ: a

Пояснение: В настоящее время основной целью Центрального банка России (ЦБ РФ) является таргетирование инфляции. Это означает, что ЦБ стремится поддерживать инфляцию на заданном уровне, обычно выражаемом в процентах. В России целевой уровень инфляции установлен на уровне 4%.

2. На рынке бизнес-курсов спрос описывается функций $Q_d = \dfrac{2024^{2024}}{P}$, то есть количество ($Q$) равно 2024 в степени 2024 делить на цену (P). Функция предложения является линейной. Укажите, какое из событий может привести к увеличению равновесной суммарной выручки продавцов бизнес-курсов.

(a) Увеличение числа продавцом на рынке бизнес-курсов;

(b) Уменьшение числа продавцом на рынке бизнес-курсов;

(c) Увеличение доходов потребителей бизнес-курсов;

(d) Введение более жёстко регулирования рынка бизнес-курсов.

Ответ: c

Пояснение: При текущей функции спроса рыночная выручка составляет $TR = P \cdot Q_d = P \cdot \dfrac{2024^{2024}}{P} = 2024^{2024}$, то есть не зависит от конкретных равновесных количества и цены. Если спрос не изменяется, то суммарная выручка продавцов тоже останется неизменной. Варианты a и b не походят, так как в них изменяется только предложение. Увеличение доходов потребителей может приводить к увеличению спроса, а вот введение более жёсткого регулирования рынка бизнес-курсов может только снизить спрос.

3. Перекрестной эластичностью называют чувствительности спроса на один товар к изменению цены на другой товар. Она показывает, насколько изменится величина спроса в процентах на товар А, если цена товара Б изменится на 1%.

Известно, что в стране Тамло, жители потребляют два товара: лапшу быстрого приготовления и яблочный сок. Экономисты посчитали, что перекрестная эластичность этих товаров равна $-0,2$. Какой вывод можно сделать из этой информации?

(a) Товары являются взаимо-дополняющими;

(b) Товары являются взаимо-заменяемыми;

(c) Выручка от продажи яблочного сока максимальна;

(d) Нет верного ответа.

Ответ: a

Пояснение: Отрицательная перекрёстная эластичность говорит о том, что при увеличении цены одного товара спрос на другой товар уменьшается, что характерно для взаимодополняемых товаров.

4. Из предложенного списка выберете пример ценовой дискриминации по группам:

(a) Льготный проезд в общественном транспорте по социальным картам;

(b) Парк аттракционов делает все аттракционы бесплатными и взимает только плату за вход;

(c) Магазин цветов проводит распродажу в связи с 8 марта;

(d) Ресторан предоставляет скидку за покупку еды на вынос.

Ответ: a

Пояснение: Ценовая дискриминация по группам – стратегия ценообразования, при которой продавец устанавливает разные цены на один и тот же товар или услугу для разных групп покупателей.

Льготный проезд в общественном транспорте по социальным картам является примером ценовой дискриминации по группам, так как здесь устанавливаются разные цены (льготные тарифы для обладателей социальных карт и стандартные для остальных) на одну и ту же услугу (проезд) для разных групп покупателей (пенсионеры, студенты, инвалиды и все остальные пассажиры).

5. Екатерине 20 лет, но она уже сейчас начала задумываться о своей пенсии. Она ожидает, что до 30 лет её доход будет равен X рублей в год, в период с 30 до 40 лет - 2X рублей в год, а с 40 и до 60 лет - 3X рублей в год. Катя предполагает, что, выйдя на пенсию в 60 лет, она перестанет работать и будет жить только на накопленные в зрелом возрасте деньги. Сейчас у Екатерины нет никаких накоплений, она пренебрегает пенсией от государства и считает, что пенсия от государства будет равна 0. Девушка хочет *сгладить свое потребление* – то есть тратить одну и ту же сумму денег в каждый год, начиная с настоящего момента. Считайте, что финансовая система позволяет Кате оформлять беспроцентные кредиты и депозиты, инфляция в стране отсутствует, а Катя хочет потратить как можно больше денег, но полностью расплатиться со всеми долгами до смерти. Выберите верное утверждение о рациональных действивях Кати, если она предполагает, что проживет до 80 лет.

(a) Для сглаживания потребления Екатерина должна накопить к пенсии 12X рублей;

(b) Для сглаживания потребления Катя никогда не будет оформлять кредит;

(c) Для сглаживания потребления Кате не нужно пользоваться услугами банка;

(d) Для сглаживания потребления до 30 лет Екатерина будет тратить больше денег в год, чем у нее получилось заработать.

Ответ: d.

Пояснение: За жизнь Катя заработает $10X + 10 \cdot 2X + 20 \cdot 3X = 90X$. Тогда при сглаженном потреблении каждый год из 60 она будет тратить $\frac{90X}{80-20} = 1.5X$. Следоваиельно в первые 10 лет она будет тратить больше, чем зарабатывает, для чего ей придётся брать кредит. Последующие 30 лет, она будет расплачиваться по кредитам и откладывать $20 \cdot 1.5X = 30X$ рублей на пенсию.

---

5 вопросов, в каждом из которых среди четырех вариантов нужно выбрать все верные. Правильным ответом считается полное совпадение выбранного множества вариантов с ключом. Правильный ответ приносит **3 балла**.

---

6. Таня предлагает Антону совместно инвестировать в инвестиционный фонд на фоне роста рынка, который создает возможность для значительной прибыли. Она предлагает следующую стратегию распределения инвестиций: Антон первым определяет сумму, которую он готов вложить из своих личных сбережений в их общий вклад в инвестиционный фонд. Зная выбор Антона, Таня принимает решение вложить в этот же фонд некоторую сумму из своих сбережений (не обязательно равную сумме Антона). Через год они получат обратно свои вложенные средства вместе с начисленными процентами и разделят эту сумму поровну между собой. Таня и Антон максимизируют свою прибыль, предполагая, что каждый из них рационален. Учитывая, что у каждого из них в распоряжении находится 500 тысяч рублей, при каких доходностях вложений в инвестиционный фонд Таня вложит сумму большую нуля?

(a) 50% **(b)** 75% **(c)** 150% **(d)** 200%

Ответ: c, d.

Пояснение: Пусть A – количество денег, вложенное Таней, B – количество денег, вложенное Антоном, а r – процентная ставка, начисляемая инвестиционным фондом. Запишем функцию доходов Тани:

$Profit = \frac{(A+B)(1+\frac{r}{100})}{2} - A = (\frac{r}{100}+1)\cdot B + (\frac{r}{100}-1)\cdot A$. Найдем максимум этой функции по A, так как это переменная, которую Таня выбирает, максимизируя свой доход.

Зависимость от A линейная. Если $(\frac{r}{100} - 1) < 0$, то Тане выгодно вложить как можно меньше денег, так как вложенные деньги сокращают ее выигрыш. И наоборот, если $(\frac{r}{100} - 1) > 0$, то выгодно вложить как можно больше. То есть, чтобы Таня вложила не 0, должно выполняться $r > 100\%$

7. На рынке башмачков со спросом $Q_d = 48 - P$ существует только одна фирма «Обувалка», обладающая абсолютной рыночной властью, то есть имеющая возможность самой устанавливать цену, которая ей выгодна, не боясь конкуренции. Про её издержки известно лишь то, что они положительны и возрастают по выпуску. Фирма выпускает объем товара, максимизирующий прибыль. Выберите верные утверждения.

(a) Оптимальный объём выпуска больше 24;

(b) Оптимальный объём выпуска не больше 24;

(c) Если фирма уменьшит выпуск в 2 раза, то её выручка вырастет;

(d) Оптимальная цена может быть меньше 36.

Ответ: b, d.

Пояснение: Выручка монополиста имеет вид: $TR = (48 - Q)Q$. Это парабола, которая убывает при $Q \geqslant 24$. Монополист не будет работать на убывающем участке выручки, так как иначе он мог бы выбрать меньший выпуск с такой же выручкой и меньшими издержками. Таким образом, оптимальный выпуск будет меньше 24, а его двукратное уменьшение приведет к снижению выручки. Однако оптимальная цена может быть ниже 36. Например, при издержках $TC = 10Q$ можно показать, что $Q = 19$, $P = 29$.

8. На конкурентном рынке чем больше фирм, тем ... (выберите наиболее вероятные утверждения)

(a) ниже цена на товар, реализуемый на этом рынке

(b) выше цена на товар, реализуемый на этом рынке

(c) выше суммарное производство всех фирм

(d) выше индекс Лернера фирм – степень рыночной власти, измеряющаяся как разница между ценой товара и предельными издержками на его производство, деленную на цену товара.

Ответ: a, c.

Пояснение: На конкурентном рынке, где присутствует большое количество фирм, каждая из них имеет ограниченную рыночную власть. В таких условиях фирмы зачастую конкурируют, в том числе и по цене. Это приводит к тому, что цена на товар на конкурентном рынке снижается и увеличению величины спроса по сравнению с ситуацией, когда на рынке присутствует меньшее количество фирм. Индекс Лернера, который измеряет степень рыночной власти фирмы, в случае конкурентного рынка уменьшается.

9. Производство некоторого товара (Q) обладает возрастающей отдачей от масштаба, если увеличение в положительное $a > 1$ число раз объёмов всех факторов производства выпуск растёт в более чем a раз. Какие из нижеперечисленных функций обладают возрастающей отдачей от масштаба?

(a) $Q = KL$ **(b)** $Q = K + L$ **(c)** $Q = K^2 + L^2$ **(d)** $Q = K + \sqrt{L}$

Ответ: a, c.

Пояснение: Пусть новый увеличенный в $\alpha > 1$ число раз объем капитала K будет называться $K^{new} = \alpha \cdot K$, а новый увеличенный в $\alpha > 1$ число раз объем труда L будет называться $L^{new} = \alpha \cdot L$. Подставим новые значения в функции и посмотрим, во сколько раз увеличилось производство.

- **(a)** $Q^{new} = K^{new} \cdot L^{new} = \alpha \cdot K \cdot \alpha \cdot L = \alpha^2 \cdot KL > \alpha \cdot KL \Rightarrow$ возрастающая отдача от масштаба
- **(b)**$Q^{new} = K^{new} + L^{new} = \alpha \cdot K + \alpha \cdot L = \alpha \cdot (K + L) = \alpha \cdot (K + L) \Rightarrow$ постоянная отдача от масштаба
- **(c)** $Q^{new} = K^{new2} + L^{new2} = (\alpha \cdot K)^2 + (\alpha \cdot L)^2 = \alpha^2 \cdot (K^2 + L^2) > \alpha \cdot (K^2 + L^2) \Rightarrow$ возрастающая отдача от масштаба
- **(d)** $Q^{new} = K^{new} + \sqrt{L^{new}} = \alpha \cdot K + \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{L} < \alpha(K + \sqrt{L}) \Rightarrow$ убывающая отдача от масштаба

10. Коэффициент Джини (G) – показатель, отражающий степень неравенства в распределении доходов внутри различных групп населения. $G = 0$, если все доходы распределены равномерно – то есть поровну между всеми жителями, но чем больше неравенство распределения, тем ближе значение коэффициента Джини к 1. Рассмотрим страну Р, в которой коэффициент Джини больше, чем в стране К. Что можно сказать о среднем доходе в стране Р на основе этой информации?

(a) Средний доход в стране Р ниже, чем средний доход в стране К;

(b) Средний доход в стране Р выше, чем средний доход в стране К;

(c) Средний доход в стране Р ниже, чем медианный доход в стране К;

(d) Ничего однозначно сказать нельзя.

Ответ: d.

Пояснение: Коэффициент Джини отражает только уровень неравенства в распределении доходов, но не даёт информации о среднем или медианном доходе. Поэтому, основываясь только на значении коэффициента Джини, невозможно сделать вывод о среднем или медианном доходе.

---

5 вопросов, с открытым ответом. Правильный ответ приносит **3 балла**.

---

11. Две большие страны Ятак и Акул торгуют друг с другом томатами. Спрос на томаты в первой стране задается уравнением : $Q_d = 120 - 0.5P$, а предложение — $Q_s = -180 + 1.5P$. В другой же стране функции принимают вид: $Q_d = 110 - P$, $Q_s = 2P - 120$ соответственно. Найдите мировую цену, которая сложится в равновесии при свободной торговле между этими странами. Считайте, что больше никакие страны не предъявляют спрос и предложение на томаты.

Ответ: 100.

Пояснение:

Сложим функции спроса:

$$Q_d = Q_{d_1} + Q_{d_2} = \begin{cases} 120 - 0.5P, & P \geqslant 110 \\ 120 - 0.5P + 110 - P, & P < 110 \end{cases} = \begin{cases} 120 - 0.5P, & P \geqslant 110 \\ 230 - 1.5P, & P < 110 \end{cases}$$

Сложим функции предложения:

$$Q_s = Q_{s_1} + Q_{s_2} = \begin{cases} 3,5P - 300, & 120 \leqslant P \\ 2P - 120, & 60 \leqslant P < 120 \end{cases}$$

Найдем точку пересечения функций:

$2P - 120 = 230 - 1.5P \Rightarrow P = 100$. Заметим, что это верно для ограничений $60 \leqslant P < 120$ для предложения и $P < 110$ для спроса.

Функция спроса всюду убывающая и неразрывная, а функция предложения – возрастающая и неразрывная, а значит у них не может быть других точек пересечений и равновесия.

12. В Российской федерации действует социальный налоговый вычет на расходы на обучение. Оформить вычет могут налоговые резиденты, которые платят НДФЛ: за себя, за супругов, детей, опекаемых, братьев и сестёр. Вычет можно получить за любые платные образовательные услуги от организаций или индивидуальных предпринимателей, у которых есть лицензия на образовательную деятельность. При оплате обучения для себя, вернуть можно 13% от уплаченной в текущем году суммы, но не превышающий лимит расходов на образование в размере 150 000 руб./год и не более уплаченного за год НДФЛ.

Предположим, что Иван потратил на своё обучение 120.000 рублей в этому году, а зарабатывал, проверяя тетради, 8.000 рублей в месяц, с которых уплачивался НДФЛ 13% каждый из 12 месяцев. Найдите максимальную сумму по социальному налоговому вычету по расходам на обучение, которую может получить Иван, если никаких других налоговых вычетов он получать не планирует.

Ответ: 12.480 рублей

Пояснение: Максимальная сумма вычета из оплаченной суммы это 13% от 120.000 рублей, то есть 15.600 рублей. Максимальная сумма вычета из уплаченного налога на доход это 13% от $12 \cdot 8.000$ рублей, то есть 12.480 рублей. Вернуть сумму большую уплаченного НДФЛ нельзя, то есть ответ 12.480 рублей.

13. Кафе «БлинОК» — уникальное заведение, в котором утром предлагается широкий выбор блинов (a), а вечером кафе переключается на производство круассанов (c), но в любое время суток оно готово продавать кофе (b). Владелец кафе стремится максимизировать выручку за день, учитывая ограниченные ресурсы.

Утром множество доступных к производству наборов товаров задается неравенством: $b_1 + c^2 \leqslant 80$, а вечером изменяется на: $a^2 + b_2 \leqslant 80$ (где b_1 – количество кофе, проданное утром, а b_2 – количество кофе, проданное вечером).

Цены на продукцию следующие – блины: $P_a = 4$, кофе: $P_b = 2$, круассаны: $P_c = 1$.

Найдите максимально возможную выручку фирмы, если потребители готовы купить столько, сколько фирма будет готова продать.

Ответ: 322,125 или $\mathbf{322\frac{1}{8}}$

Пояснение: Выручка (TR) - это сумма доходов от продажи всех товаров:

$$TR = P_a \cdot a + P_b \cdot b + P_c \cdot c = 4a + 2(b_1 + b_2) + c = 4a + 2b_1 + 2b_2 + c.$$

Так как функция возрастает по всем аргументам, выгодно произвести как можно больше товаров как утром, так и вечером, поэтому в ограничениях можно заменить неравенство на равенство и подставить в функцию выручки:

$$TR = 4a + 2(b_1 + b_2) + c = 4a + 2(80 - c^2) + 2(80 - a^2) + c = 4a - 2a^2 + c - 2c^2 + 320.$$

Это две независимые параболы ветвями вниз, так что промаксимизируем их независимо друг от друга, получим $c^* = 1/4$ и $a^* = 1$. Подставим результат в искомую функцию: $TR = 4 - 2 + 0,25 - 0,125 + 320 = 322,125$.

14. Вы снимаете 1000 рублей со счета в своем банке и покупаете на них облигации у одноклассника. Он кладет эти деньги на счет в другой банк в вашей стране. На сколько изменится предложение денег при норме обязательных резервов 20%, если предложение денег – это совокупность наличных и безналичных средств, находящихся в обращении? В ответ укажите величину изменения в рублях по модулю.

Ответ: 0

Пояснение: Покупка облигации у одноклассника переводит деньги между счетами в банках, не изменяя общего количества денег в обращении. Поэтому изменение предложения денег равно 0.

15. Диана захотела порадовать себя на выходных после тяжелого дня. Она знает, что ее радуют концерты (x) и спетые в караоке песни (y), причем они вместе формируют у Дианы полезность вида $U = -x^2 + 4x - y^2/2 + 16y$. Также известно, что на каждый концерт надо потратить 4 часа на выходных, а на каждую спетую в караоке песню – полчаса. Всего у Дианы 32 свободных часа (16 ушли на здоровый сон!), которые она может потратить на развлечения. Сколько концертов посетит Диана за выходные, максимизируя свою полезность?

Ответ: 2

Пояснение: Пока забудем про ограничение по времени и просто промаксимизируем полезность. Заметим, что функция полезности разбивается на две независимых параболы ветвями вниз по x и y. Максимумы этих парабол будут в их вершинах $x^* = 2$; $y^* = 16$. Диана не захочет ходить на концерты и петь в караоке в больших объёмах, даже если у нее будет на это время. Такая ситуация называется **насыщением**. Остаётся заметить, что для достижения найденных объёмов x и y Диане потребуется $4x^* + \frac{1}{2}y^* = 8 + 8 = 16$ часов, что меньше 32.

Максимум за тестовую часть – **40 баллов**

11 класс
Задачи с развернутым ответом

Для каждой из задач ниже необходимо написать развернутое решение. Обратите внимание, что только верно написанный ответ не будет оценен в полный балл, а продвижения по задачам могут быть оценены по критериям, даже если полученный ответ окажется неверным. Каждая верно решенная задача приносит **20 баллов**. Всего будет **3 задачи**, то есть за часть с развернутым ответом можно получить максимум **60 баллов.**

---

16. Дмитрий – продавец распылителей для масла на маркетплейсе «БВ». Его клиентами являются три группы потребителей: богачи, верхний средний класс и нижний средний класс. В таблице ниже приведена максимальная сумма денег, которую каждая из групп готова заплатить за один распылитель для масла. В каждой группе потребителей 100 человек и каждому потребителю нужен только один распылитель, а если он стоит больше максимальной суммы, то потребитель просто не покупает его.

Группа потребителей	Богачи	Верхний средний класс	Нижний средний класс
Максимальная сумма	400 рублей	300 рублей	200 рублей

Издержки Дмитрия на продажу одного распылителя составляют 100 рублей.

(a) (8 баллов) Предположим, что Дмитрий знает максимальную сумму денег, которую готова платить каждая группа потребителей, максимизирует свою прибыль и назначает единую цену для всех потребителей. Найдите, какую цену назначит Дмитрий.

(b) (6 баллов) Назовём благосостоянием потребителей разницу между максимальной суммой, которую они готовы платить и уплаченной ценой, а благосостоянием производителя – его прибыль. Для предыдущего пункта найдите суммарное благосостояние всех потребителей, благосостояние Дмитрия и суммарное благосостояние.

(c) (6 баллов) Предположим, что Дмитрий не может назначать цену выше 150 рублей, так как иначе предпринимательница Таня выйдет на рынок распылителей и переманит к себе всех клиентов. Найдите суммарное благосостояние каждой из трёх групп потребителей, Дмитрия и суммарное благосостояние всех агентов в этом случае. Увеличилось ли благосостояние?

Решение:

(a) Дмитрий может выбрать три возможные цены, в зависимости то того, каким группам он хотел бы реализовывать товар.

1. Цена 400 рублей – продавать только богачам:

   Прибыль: (Цена – издержки на единицу) $\times$ (Количество потребителей) $(400 - 100) \times 100 = 300 \times 100 = 30.000$ рублей.

2. Цена 300 рублей – продавать богачам и верхнему среднему классу:

   Прибыль: $(300 - 100) \times (100 + 100) = 200 \times 200 = 40.000$ рублей.

3. Цена 200 рублей – продавать богачам, верхнему среднему классу и нижнему среднему классу:

   Прибыль: $(200 - 100) \times (100 + 100 + 100) = 100 \times 300 = 30.000$ рублей.

Ответ: Дмитрий назначит цену 300 рублей, так как в этом случае прибыль максимальна.

(b) Цена на рынке равна 300, тогда:

1. Суммарное благосостояние богачей: $(400-300) \times 100 = 100 \times 100 = 10.000$ рублей.
2. Суммарное благосостояние верхнего среднего класса: $(300 - 300) \times 100 = 0$.
3. Суммарное благосостояние нижнего среднего класса: 0 рублей (не покупают).
4. Благосостояние Дмитрия (прибыль): 40.000 рублей.

Ответ: суммарное благосостояние потребителей — 10.000 рублей, благосостояние Дмитрия — 40.000 рублей. Суммарное благосостояние: 50.000 рублей.

(c) Если Дмитрий не может назначать цену выше 150 рублей, то назначит цену 150 рублей. За эту цену смогут купить все три группы.

1. Благосостояние богачей: $(400 - 150) \times 100 = 250 \times 100 = 25.000$ рублей.
2. Благосостояние верхнего среднего класса: $(300 - 150) \times 100 = 150 \times 100 = 15.000$ рублей.
3. Благосостояние нижнего среднего класса: $(200 - 150) \times 100 = 50 \times 100 = 5.000$ рублей.
4. Благосостояние Дмитрия (прибыль): $(150 - 100) \times 300 = 50 \times 300 = 15.000$.

Ответ: 60.000 рублей, суммарное благосостояние увеличилось.

Критерии:

Пункт (a):

+**2 балла** за верное значение прибыли в случае цены равной 400.

+**2 балла** за верное значение прибыли в случае цены равной 300.

+**2 балла** за верное значение прибыли в случае цены равной 200.

+**2 балла** за верный ответ, то есть выбор оптимальной цены.

Итого за пункт: **не более 8 баллов**

Пункт (b):

+**3 балла** за верное значение суммарного благосостояния потребителей.

+**2 балла** за верное значение благосостояния Дмитрия.

+**2 балла** за верное значение суммарного благосостояния.

Итого за пункт: **не более 6 баллов**

Пункт (c):

+1 балл за верное значение благосостояния богачей.

+1 балл за верное значение благосостояния верхнего среднего класса.

+1 балл за верное значение благосостояния нижнего среднего класса.

+1 балл за верное значение благосостояния Дмитрия.

+1 балл за верное значение суммарного благосостояния.

+1 балл за верный ответ, что благосостояние выросло.

Итого за пункт: **не более 6 баллов**

Обратите внимание! Если участник допускает арифметическую ошибку в случае подсчёта прибыли или благосостояния конкретной группы потребителей, то балл за подсчёт суммарного благосостояния группы или всех агентов выставляется с учётом ошибки. Например, если в пункте (b) участник ошибся в благосостоянии богачей и получил 5.000 рублей, а прибыль Дмитрия рассчитал верно и суммарное полученное благосостояние 45.000, то балл за суммарно благосостояние участник получает.

Итого за задачу: **не более 20 баллов**

17. У бабушки есть две грядки, на которых можно выращивать чеснок (X) и морковку (Y). На первой грядке можно вырастить или 20 морковок, или 20 головок чеснока, или любую другую линейную комбинацию. На второй грядке бабушка может вырастить так же максимум 20 морковок, но для производства каждой головки чеснока придется отказываться от 2 морковок.

(a) (4 балла) Изобразите на графике кривую производственных возможностей (КПВ) каждой из двух грядок, а также задайте их аналитически.

Подсказка: Кривая производственных возможностей — график или уравнение, которые показывают все возможные объёмы производства чеснока и морковок при эффективном и полном использовании ресурсов.

(b) (4 балла) Изобразите на графике кривую производственных возможностей бабушкиного огорода в целом, а также запишите её аналитически.

(c) (6 балла) Сёстры Маша и Саша, как главные юные экономистки, и по совместительству – любимые внучки, решили увеличить потребительские возможности семьи. Маша и Саша могут продать бабушкину морковку по 10 рублей за штуку, а чеснок – по 5 рублей, а на вырученные деньги купить по тем же ценам любое количество морковки и чеснока.

Постройте кривую торговых возможностей (КТВ) семьи, где КТВ – график или уравнение, которые показывают все возможные объёмы потребления чеснока и морковок при эффективном и полном использовании ресурсов с учётом возможности торговли. Изобразите КТВ графически и запишите её аналитически.

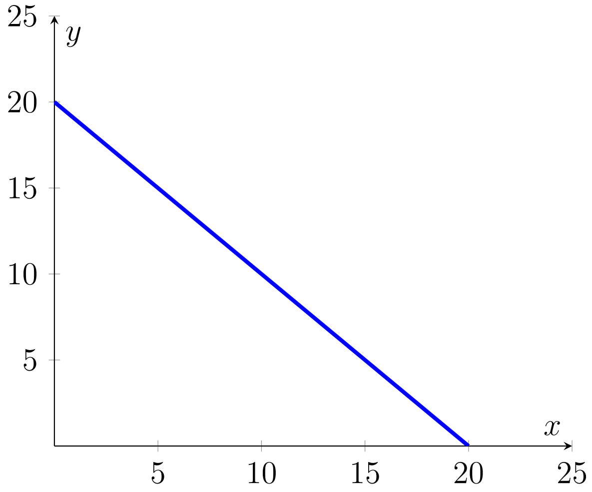
(d) (4 балла) По давнему секретному рецепту бабушки для одной сковороды вкусного плова нужно две морковки и одна головка чеснока.

Какое максимальное количество сковородок плова сможет приготовить бабушка с учетом выхода внучек на рынок?

(e) (2 баллов) Сколько головок чеснока нужно вырастить в огороде, чтобы бабушка смогла приготовить количество сковородок плова из пункта (c)?

Решение:

(a) Для изображения КПВ первой грядки отметим две краевые точки, а затем соединим их линейной функцией, так как можно вырастить любую другую линейную комбинацию.



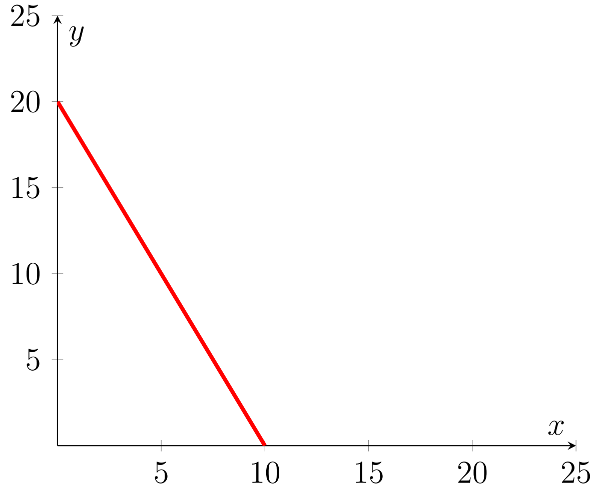
Уравнение можно найти по двум точкам через решение системы уравнений: линейная функция задается уравнением $y = k \cdot x + b$. Одна из точек это $x = 0$ и $y = 20$, а вторая $x = 20$ и $y = 0$. Тогда необходимо решить систему:

$$\begin{cases} 0 = b + k \cdot 20 \\ 20 = b + k \cdot 0 \end{cases}$$

Решение системы: $b = 20, k = -1 \Rightarrow$ уравнение КПВ первой грядки задается как $y = 20 - x$.

Примечание: Уравнение КПВ можно было получить, заметив, что $|k| = tg(\alpha) = 1$, где угол α - это угол между катетом на оси X и гипотенузой в прямоугольном треугольнике. Тогда, так как КПВ всегда имеет убывающий вид, то есть с ростом x будет падать y, то, чтобы найти уравнение, достаточно подставить одну из точек $(0; 20)$ или $(20; 0)$ в уравнение $y = b - x$.

Чтобы изобразить КПВ второй грядки, нужно так же обозначить одну точку $x = 0$, $y = 20$. Далее заметим, что альтернативные издержки каждой головки чеснока постоянны и равны 2, тогда вместо $y = 20$ можно максимально вырастить $x = \dfrac{20}{2} = 10$ головок чеснока – обозначим эту точку также на графике, а далее соединим точки линейной функцией.



Уравнение КПВ можно восстановить аналогично двумя способами:

Способ №1 - через решение системы линейных уравнений:

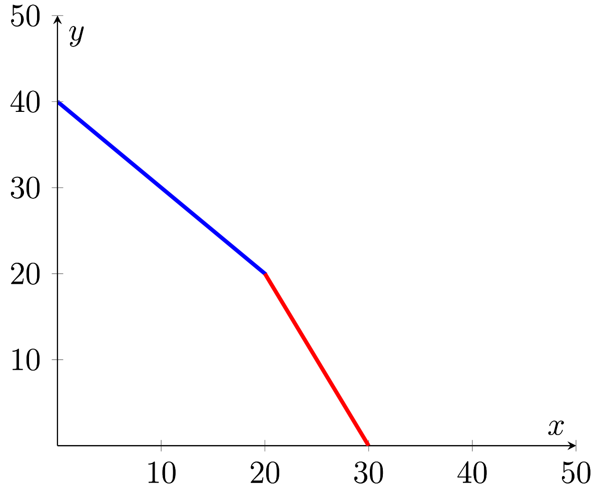
$$\begin{cases} 0 = b + k \cdot 10 \\ 20 = b + k \cdot 0 \end{cases} \tag{1}$$

Откуда $b = 20, k = -2$, а уравнение КПВ задается как $y = 20 - 2x$

Примечание: Способ №2 - через альтернативные издержки и одну точку на КПВ: $|k| = tg(\alpha) = 2$, где угол α - это угол между катетом на оси X и гипотенузой в прямоугольном треугольнике. Тогда, так как КПВ линейна, то, чтобы найти уравнение, достаточно подставить одну из точек $(0; 20)$ или $(10; 0)$ в уравнение $y = b - 2x$. Тогда уравнение КПВ второй грядки задается как $y = 20 - 2x$

(b) Заметим, что альтернативные издержки производства чеснока на первой грядке равны 1, что меньше, чем альтернативные издержки производства чеснока на второй грядке, где они равны 2. Тогда бабушка начнет выращивать чеснок сначала на первой грядке и только после того, как производственные мощности первой грядки закончатся, чеснок начнет выращиваться на второй грядке. Иначе говоря, в суммарной КПВ бабушка сначала производит чеснок по первой КПВ, а потом переключается на вторую.

Отметим максимальные точки производства чеснока и морковки: максимальное число головок чеснока равно $20 + 10 = 30$, максимальное число морковок равно $20 + 20 = 40$. Точка излома КПВ – точка, когда закончится производство чеснока на первой КПВ. То есть бабушка сможет произвести $x = 20$, потеряв при этом $y = 20$ от максимального количества морковок. Точка излома: $x = 20, y = 40 - 20 = 20$. Изобразим на графике:



Уравнение КПВ — кусочно заданная линейная функция, которую можно восстановить любым из двух предыдущих способов: по двум точкам через решение системы линейных уравнений или же через одну точку и альтернативные издержки.

Итоговое уравнение суммарной КПВ:

$$y = \begin{cases} 40 - x, x \in [0; 20] \\ 60 - 2x, x \in [20; 30] \end{cases} \quad (2)$$

(c) Способ №1 - максимизация вырученных с продажи денег. Поиск КТВ эквивалентен максимизации вырученных с продажи товаров средств, так как максимальное количество чеснока и морковки можно купить, только если от торговли была получена максимальная выручка. Если выручка не максимальна, то и объемы купленных на эти деньги чеснока и морковки тоже не максимальны, а значит, это не КТВ.

$TR = 5 \cdot x + 10 \cdot y \to max$

Пусть $x \in [0; 20]$, тогда $TR = 5 \cdot x + 10 \cdot (40 - x) = 400 - 5x$ – это линейная функция, которая убывает по $x \Rightarrow x^* = 0, y^* = 40, TR_{max} = 400$.

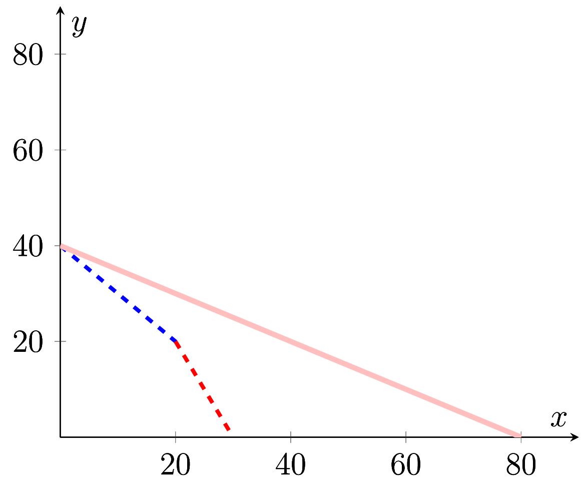
Пусть $x \in [20; 30]$, тогда $TR = 5 \cdot x + 10 \cdot (60 - 2x) = 600 - 15x$ - это линейная функция, которая убывает по $x \Rightarrow x^* = x_{min} = 20, y^* = 20, TR_{max} = 600 - 300 = 300$. $TR_{max} = 300 < 400 \Rightarrow$ максимальная выручка достигается именно на первом участке. Тогда КТВ задается уравнением $10y + 5x = 400 \Rightarrow y = 40 - 0.5x$

Способ №2 - через сравнение альтернативных издержек производства и относительной цены - то есть рыночных альтернативных издержек. Если одна морковка стоит 10, а одна головка чеснока 5, то на рынке альтернативные издержки 1 головки чеснока равны 0.5 морковки. Получается, на КПВ бабушка может производить чеснок сначала вместо одной морковки, потом вместо двух морковок, а на рынке, продав все морковки, может покупать чеснок за 0.5 морковки, что дешевле, чем получение чеснока по КПВ. Иначе говоря, относительная цена головок чеснока, равная $\frac{P_x}{P_y} = 0.5 < 1 < 2 \Rightarrow$ оптимальная точка производства для получения КТВ - это $(0; 40)$. Тогда КТВ можно восстановить по одной точке $(0; 40)$ и по относительной стоимости чеснока - то есть, как и в прошлом пункте, альтернативным издержкам. Тогда $|k| = 0.5 = \frac{P_x}{P_y}$,

$$\begin{cases} 40 = b - 0.5 \cdot 0 \end{cases} \quad (3)$$

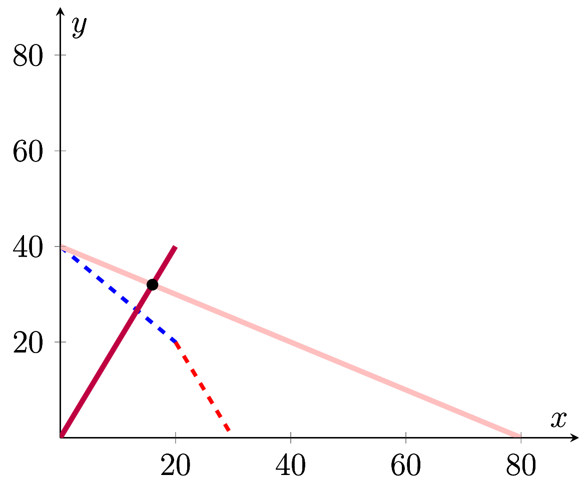
$b = 40, k = -0.5$, уравнение КТВ задается как $y = 40 - 0.5x$

Изобразим на графике:



Пунктиром представлена суммарная КПВ, розовым цветом - КТВ. Участник не обязан изображать КПВ и КТВ на одном графике.

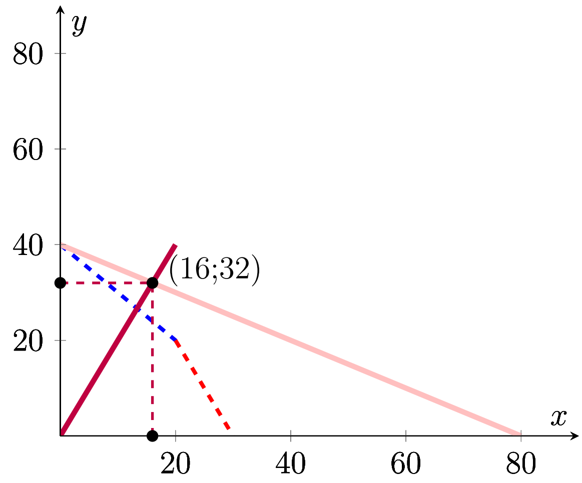
(d) Найдем кривую комплектов: раз одна сковородка плова получается из одной головки чеснока и двух морковок, то по количеству в одной сковородке плова морковок будет в 2 раза больше, чем головок чеснока. Тогда кривая комплектов задается как $y = 2x$. Пересечем кривую комплектов с КТВ:



Решаем систему:

$$\begin{cases} y = 40 - 0.5x \\ y = 2x \end{cases} \tag{4}$$

Откуда $x^* = 16, y^* = 32$



Тогда максимальное количество сковородок равно 16.

(e) Заметим, что такую КТВ можно получить, только если вообще не выращивать чеснок. Весь чеснок для плова будет куплен на рынке, оптимальное количество выращенного чеснока $= 0$.

Критерии:

Пункт (a):

1 балл за верное уравнение КПВ первой грядки.

$+$**1 балл** за верный график КПВ первой грядки.

$+$**1 балл** за верное уравнение КПВ второй грядки.

$+$**1 балл** за верный график КПВ второй грядки.

Итого за пункт: **не более 4 баллов**

Пункт (b):

$+$**2 балла** за верный график суммарной КПВ. Верным графиком считается тот, у которого указана точка излома и обе крайние точки.

$+$**1 балл** за верное уравнение КПВ на участке по $x \in [0; 20]$.

$+$**1 балл** за верное уравнение КПВ на участке по $x \in [20; 30]$.

Итого за пункт: **не более 4 баллов**

Пункт (c):

$+$**3 балла** за верный график КТВ. Верным графиком считается тот, у которого указана точка $x = 0$ и $y = 40$ и хотя бы ещё одна любая верная точка.

$+$**3 балла** за верное уравнение КТВ.

Итого за пункт: **не более 6 баллов**

Пункт (d):

$+$**2 балла** за верно найденную кривую комплектов.

$+$**2 балла** за верно найденное максимальное количество сковородок плова. Если найдено только оптимальное количество чеснока и морковки, то ставится **1 балл**

Итого за пункт: **не более 4 баллов**

Пункт (e):

$+$**2 балла** за верно найденное количество головок чеснока.

Итого за пункт: **не более 2 баллов**

Обратите внимание! Участник мог получить уравнения КПВ и КТВ и другими способами.

Итого за задачу: **не более 20 баллов**

18. Фирма монополист «Одуванчик» работает на рынке цветов с функцией спроса $Q_d = 36 - P$, где Q_d – величина, которую готовы приобрести потребители при каждом значении цены, а P – цена на продукцию. Издержки фирмы составляют $TC(Q) = Q^2$, где $TC(Q)$ – издержки на производство Q единиц продукции.

(a) (8 баллов) Найдите оптимальные цену и количество, которые назначит фирма, если её целью является максимизация прибыли.

(b) (12 баллов) Правительство страны решило, что цветы оказывают позитивное влияние на жителей, увеличивая их трудоспособность, поэтому приняло решение увеличить выпуск монополиста. Теперь фирме нельзя продавать на рынке количество, меньшее чем $\overline{Q}$. Однако руководитель фирмы имел связи в правительстве и смог договориться об отмене этой меры, в случае если фирма заплатит в бюджет 18 денежных единиц. В случае если платеж не поступит, то мера останется в силе. Найдите зависимость оптимального выпуска фирмы Q^* от назначенного правительством $\overline{Q}$. Если фирме безразлично платить 18 д.е. или не платить, то она платит.

Ответ: a) $Q = 9$**;** $P = 27$**; b)** $Q^* = \overline{Q}$ **при** $\overline{Q} \in [9; 12]$**,** $Q^* = 9$ **иначе**

(a)

Вариант 1

Запишем прибыль монополиста (выручка - издержки)

$$\pi = TR - TC = PQ - Q^2 = (36 - Q)Q - Q^2 = 36Q - 2Q^2$$

Вместо P была подставлена функция спроса, так как монополист может сам выбирать цену. Максимизиурем прибыль по количеству. Можно заметить, что это парабола ветвями вниз с максимумом в вершине $Q = \frac{36}{4} = 9$ или можно взять производную по количеству и приравняв её к 0, тоже получить $Q = 9$. Отметим, что при использовании второго варианта, необходимо обосновать, что это именно точка максимума. Подставляя найденное Q в функцию спроса, получим $P = 27$.

Вариант 2

Запишем прибыль монополиста (выручка - издержки)

$$\pi = TR - TC = PQ - Q^2 = P(36 - P) - (36 - P)^2 = 36^2 + 108P - 2P^2$$

Вместо Q была подставлена функция спроса, так как монополист может сам выбирать цену. Максимизиурем прибыль по цене. Можно заметить, что это парабола ветвями вниз с максимумом в вершине $P = \frac{108}{4} = 27$ или можно взять производную по цене и приравняв её к 0, тоже получить $P = 27$. Отметим, что при использовании второго варианта, необходимо обосновать, что это именно точка максимума. Подставляя найденное P в функцию спроса, получим $Q = 9$.

Оптимальное значение прибыли $\pi^* = 162$ (не требовалось от участников в этом пункте).

Ответ: (a) $Q = 9$**;** $P = 27$.

b) 1. Заметим, что при $\overline{Q} < 9$ достижим максимум пункта a). Поэтому $Q^* = 9$ при таких значениях $\overline{Q}$.

2. При $\overline{Q} \geqslant 9$ у монополиста есть 2 варианта

2.1 Если монополист платит 18 д.е., то ограничение снимается, а прибыль становится равной $\pi = PQ - Q^2 - 18$, то есть такой же как в пункте a) за вычетом 18. Вычитание постоянного числа при максимизации не влияет на оптимальное значение $Q^* = 9$. При этом получаем $\pi^* = 162 - 18 = 144$. (Можно и заново решить задачу оптимизации – это не будет ошибкой).

2.2 Если монополист не платит 18 д.е., то его прибыль составляет $\pi = PQ - Q^2 = (36 - Q)Q - Q^2$ однако ему доступны только выпуски $Q \geqslant \overline{Q}$. Так как прибыль это парабола ветвями вниз по количеству с вершиной $Q = 9$, а монополисту доступны только $Q \geqslant \overline{Q} \geqslant 9$, то он будет выбирать ближайшее к вершине Q, то есть $Q^* = \overline{Q}$. Тогда прибыль составит $\pi = (36 - \overline{Q})\overline{Q} - \overline{Q}^2$.

2.3 Осталось выбрать наилучший вариант при каждом значении $\overline{Q}$. Для этого сравним прибыли из пунтков 2.1 и 2.2. Найдём когда монополист выберет не платить 18 д.е.:

$$(36 - \overline{Q})\overline{Q} - \overline{Q}^2 > 144$$

$$0 > 2(\overline{Q} - 6)(\overline{Q} - 12)$$

$$\overline{Q} \in (6; 12)$$

Отбрасывая часть отрезка, где $\overline{Q} < 9$, получим, что монополист выбирает не платить 18 д.е. при $\overline{Q} \in [9; 12)$. Тогда при $\overline{Q} \geqslant 12$ монополист будет платить 18 д.е..

(Участник мог решать обратное неравенство или по-другому сравнивать прибыли.)

Ответ на пункт b):

$$Q^* = \begin{cases} \overline{Q} \text{ если } \overline{Q} \in [9, 12) \\ 9, \text{иначе} \end{cases}$$

Отметим, что $\overline{Q} = 9$ можно включать в любой из случаев.

Ответ: (b) $Q^* = \overline{Q}$ **при** $\overline{Q} \in [9; 12]$**,** $Q^* = 9$ **иначе.**

Критерии:

Пункт (a):

+4 балла за верное выражение для функции прибыли в зависимости от одной переменной (цены или количества).

+2 балла за нахождение $Q = 27$.

+2 балла за нахождение $P = 9$.

Итого за пункт: **не более 8 баллов**

Пункт (b):

+3 балла за верное значение Q^* при $\overline{Q} < 9$.

+3 балла за верное значение прибыли в случае 2.1.

+3 балла за верное выражение для прибыли в зависимости от $\overline{Q}$ для случая 2.2.

+3 балла за полностью верный ответ – зависимость $Q(\overline{Q})$

Итого за пункт: **не более 12 баллов**

Итого за задачу: **не более 20 баллов**

Максимум за часть с развернутым ответом – **60 баллов**

Всего за работу максимум – 100 баллов.